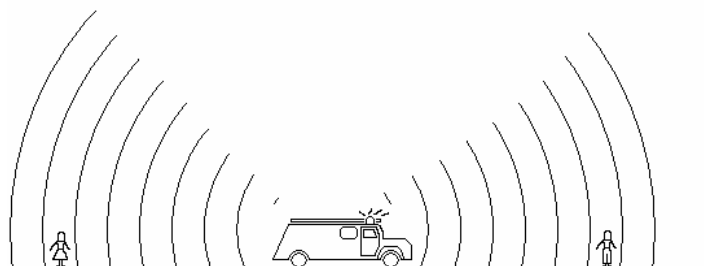


# Fysica van de echografie: Doppler techniek

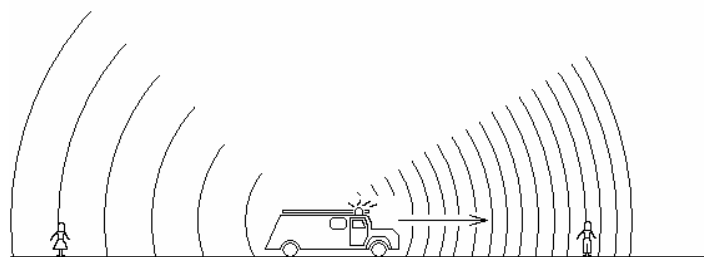
## 1 Het Doppler effect

Het Doppler-effect is het effect dat we kunnen horen wanneer er een brandweerauto met sirene voorbij rijdt. Als de brandweerauto naar ons toe rijdt horen we de sirene hoger dan wanneer deze langs ons gereden is en van ons af rijdt.

De brandweerauto zelf produceert sirene-geluid dat vaste toonhoogtes heeft (Fig. 1a), als de brandweerauto stil staat horen het vrouwtje en het mannetje dezelfde toonhoogtes. Als de brandweerauto rijdt is de golflengte aan de voorkant korter, en aan de achterkant langer doordat de auto 'naar zijn eigen golven toe rijdt' (Fig. 1b), het mannetje hoort hogere tonen, en het vrouwtje hoort lager tonen dan zonet.



**Figuur 1a.** Geluidsgolven rondom de stilstaande brandweerauto.

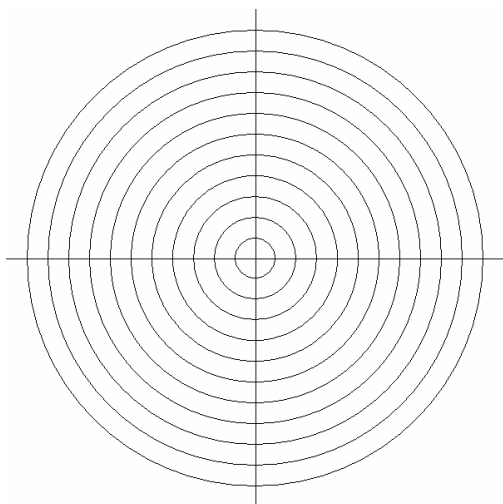


**Figuur 1b.** Geluidsgolven rondom de rijdende brandweerauto.

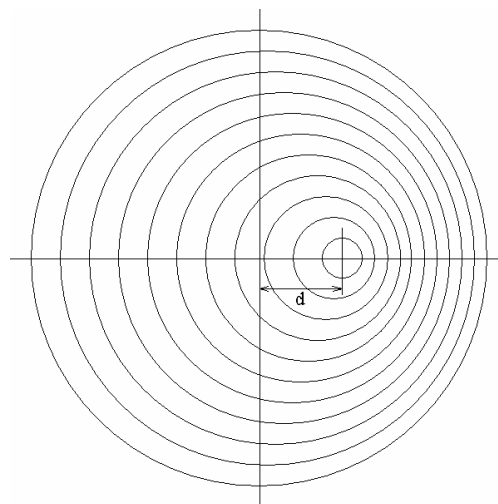
Hetzelfde effect kunnen we waarnemen bij race-wedstrijden waarbij raceauto's of -motoren ons passeren, of wanneer we in de trein langs een spoorwegovergang komen.

Het Doppler-effect is te begrijpen aan de hand van Figuur 2. In Figuur 2a staat de geluidsbron stil, en produceert golven die zich bolvormig voortplanten. In Figuur 2b beweegt de geluidsbron naar rechts over een afstand  $d$ , gedurende deze tijd worden er 11 golven geproduceerd, en deze tijd is dus 11 trillingstijden ofwel  $11T$ . We zien dat links in Figuur 2b de golflengte langer is dan die in Figuur 2a (de toonhoogte is lager), en rechts in Figuur 2b is de golflengte korter dan die in Figuur 2a (de toonhoogte is hoger). Je kunt je voorstellen dat

het effect groter is naarmate de afgelegde afstand  $d$  groter is, ofwel wanneer de *snelheid* van de geluidsbron groter is. De snelheid is gedefinieerd als de afgelegde afstand gedeeld door de tijd, in dit geval:  $v = \frac{d}{11T}$



**Figuur 2a.** Golven rondom een stilstaande geluidsbron.



**Figuur 2b.** Golven rondom een bewegende geluidsbron.

Het Doppler-effect treedt niet alleen op wanneer de geluidsbron beweegt, maar ook wanneer de waarnemer beweegt, en de geluidsbron stilstaat. Als de waarnemer naar de geluidsbron toe beweegt hoort hij een hogere toon, zijn oor passeert de golven sneller dan wanneer hij stilstaat. Wanneer hij van de geluidsbron af beweegt hoort hij een lagere toon. In het algemeen kunnen we zeggen dat voor het optreden van het Doppler-effect het nodig is dat de waarnemer zich ten opzichte van de geluidsbron beweegt. Daarom treedt het zowel op bij de rijdende brandweerauto (waarbij de waarnemer stilstaat) als bij het passeren van een spoorweg overgang wanneer je in de trein zit (waarbij de waarnemer beweegt en de geluidsbron stilstaat).

Het Doppler-effect treedt ook op bij andere golf verschijnselen, zoals bijvoorbeeld bij licht. In de astronomie wordt de golflengte bepaald van licht dat wordt uitgezonden door andere sterrenstelsels, dan ons sterrenstelsel. Uit de Doppler-verschuiving van dit licht kan de snelheid van dat sterrenstelsel ten opzichte van de aarde worden bepaald.

Het Doppler-effect is voorspeld en ontdekt door de Oostenrijkse fysicus en wiskundige Christian Doppler (1803-1853). Hij voorspelde de toepassing in de astronomie, maar de meetinstrumenten waren in zijn tijd daarvoor nog niet geschikt. In 1845 werden er wel experimenten met geluid uitgevoerd. Geoefende musici moesten hun instrumenten op een rijdende stoomtrein bespelen. Andere musici, met een goed geoefend gehoor, moesten de tonen noteren die zij hoorden wanneer de trein naderde en wanneer de trein zich verwijderde. In 1846 publiceerde Doppler zijn bevindingen, waarbij hij al schrijft dat de mate van verschuiving afhangt van de relatieve snelheid van waarnemer ten opzichte van de geluidsbron. De stoomtrein was in die tijd een nieuwe uitvinding. Voor zijn tijd bedreef Doppler dus high-tech wetenschap.

Wanneer de geluidsfrequentie (= toonhoogte) veranderd is, spreken we ook wel van 'vershoven' frequenties. De geluidsfrequentie kan omhoog of omlaag verschoven zijn. De Doppler-verschuiving van de frequentie is van een aantal factoren afhankelijk, o.a. de snelheid van de geluidsbron, de snelheid van de waarnemer en de snelheid van het geluid, maar ook van de richting waarin de bewegingen plaatsvinden.

Wanneer de brandweer auto recht op ons af komt is de Doppler-verschuiving maximaal omhoog en wanneer deze van ons afbeweegt is de Doppler-verschuiving maximaal omlaag. Kijken we in Figuur 2b dan zien we dat langs de verticale as de golflengte nauwelijks veranderd is, loodrecht op de bewegingsrichting treedt geen Doppler-effect op.

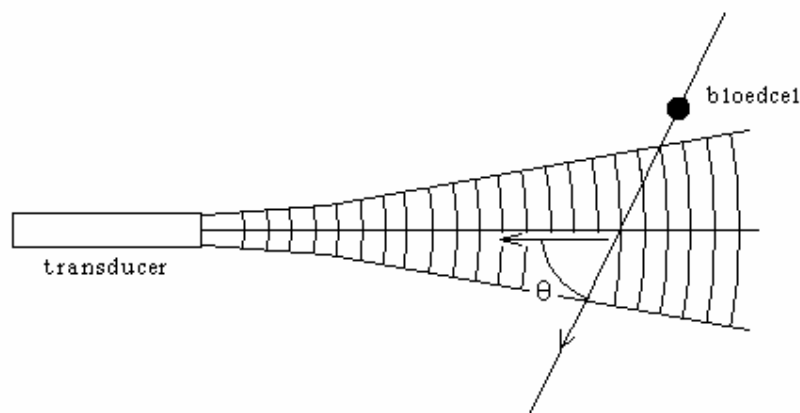
## 2 Het Doppler effect in de echografie

Doppler-verschuiving treedt ook op bij ultra-geluid. Binnen de echografie wordt dit effect gebruikt om de snelheid van bloed in bloedvaten te meten.

De meeste echo-apparatuur werkt met frequenties, in de orde van de 3-5 MHz. De transducer die op de huid staat functioneert in dit geval als geluidsbron. De ultrageluidsgolven treden het lichaam binnen. Wanneer dit ultrageluid in het weefsel gestuurd wordt zal het weerkaatst worden aan overgangen tussen verschillende weefsels en terugkomen op de transducer. Dit ultrageluid wordt vooral gebruikt voor het maken van een afbeelding.

Een deel van het ultrageluid zal in bloedvaten binnen dringen. Wanneer een bloedcel naar de transducer toe beweegt zal deze een hogere frequentie 'horen', dan de werkelijk uitgezonden frequentie. De beweging van de bloedcel veroorzaakt dus in dit geval de Doppler-verschuiving. Doordat de cel een andere impedantie heeft dan zijn omgeving (het bloedplasma), zal een deel van het geluid weerkaatst worden door de bloedcel. In dit geval wordt de cel zelf een nieuwe bron die (nog steeds) naar de transducer toe beweegt, en dus opnieuw een Doppler-verschuiving veroorzaakt. De golf die op deze manier, door de bewegende bloedcel, gereflecteerd wordt, ondervindt dus twee maal een Doppler-verschuiving, één maal bij het ontvangen door de bloedcel, en één keer bij het terugzenden naar de transducer. In dit geval is de verschuiving twee maal naar een hogere frequentie. Wanneer de bloedcel van de transducer af beweegt vindt er twee maal een verschuiving naar een lagere frequentie plaats.

Voor het bepalen van de frequentie-verschuiving is de hoek tussen de as van de transducer en de bewegingsrichting van de bloedcel van belang (Figuur 3).



**Figuur 3.** Definitie van de hoek  $\theta$  tussen de bewegingsrichting van de bloedcel en de as van de transducer.

De frequentie-verschuiving kan worden berekend met :

$$\Delta f = \frac{2 f_0 v \cos \theta}{c}$$

Hierin is:

$\Delta f$  de frequentie verschuiving (Hz)

$f_0$  de door de transducer uitgezonden frequentie (Hz)

$v$  de snelheid van het reflecterende deeltje (m/s)

$\theta$  de hoek tussen de ultra-geluidsbundel en de stroomrichting

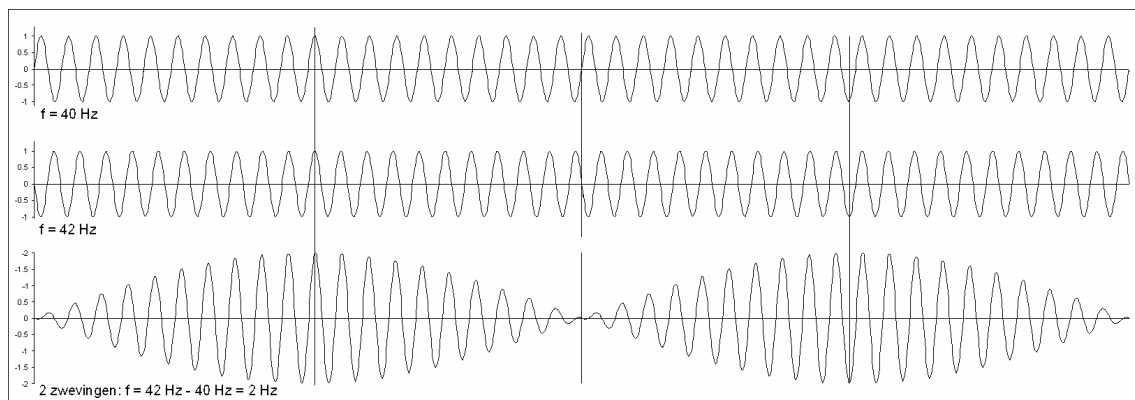
$c$  de geluidssnelheid in het weefsel (m/s)

Hieruit kunnen we zien dat als het deeltje naar de transducer toe beweegt,  $\theta = 0^\circ$  dan is  $\cos \theta = 1$ , en  $\Delta f$  positief en maximaal. Als het deeltje van de transducer af beweegt,  $\theta = 180^\circ$  dan is  $\cos \theta = -1$ , en  $\Delta f$  de maximale negatieve waarde.

Voorbeeld 1: We hebben rode bloedcellen die met een snelheid van 100 cm per seconde door een bloedvat stromen (bijv. *arteria carotis*),  $v = 1,00$  m/s. We gebruiken een transducer met een zend-frequentie van  $f_0 = 5$  MHz en we meten onder een hoek  $\theta = 58^\circ$ . De geluidssnelheid in bloed is  $c = 1570$  m/s We vinden dan:

$$\Delta f = \frac{2 f_0 v \cos \theta}{c} = \frac{2 \times 5 \cdot 10^6 \times 1,00 \times \cos 58^\circ}{1570} = 3375 \text{ Hz} \quad (1)$$

Het door zo'n bloedcel gereflecteerde signaal heeft een frequentie van 5 003 375 Hz, en dat verschilt maar een beetje de oorspronkelijk uitgezonden frequentie van 5 000 000 Hz. Ondanks de hoge snelheid is de frequentie verschuiving toch een minder dan 1/1000 ste van de zendfrequentie.



**Figuur 4.** Het ontstaan van zwevingen door interferentie van twee golven met een verschillende frequentie.

## 4 Zwevingen

Wanneer twee geluiden met een net iets verschillende frequentie worden gemengd ontstaan er zwevingen. Het geluid bestaat uit de gemiddelde van de oorspronkelijke frequenties, maar dit geluid wordt steeds harder en zachter, doordat de twee geluidsbronnen elkaar soms versterken, maar soms ook uitdoven. In Figuur 4 zijn over een tijd van 1 s. de golfpatronen van een twee geluidsbronnen getekend. Het bovenste patroon heeft een frequentie van 40 Hz, het tweede patroon heeft een iets hogere frequentie van 42 Hz. Het onderste patroon ontstaat wanneer je de beide bovenste patronen optelt. Zo nu en dan wordt het geluid 2× zo sterk als dat van één enkele bron, op andere tijden treedt uitdoving op, het wordt dan even stil. Dit verschijnsel noemen we zwevingen, de zwevingsfrequentie is in dit geval 2 Hz, gelijk aan het frequentie verschil van de beide signalen (40 Hz en 42 Hz).

Op dezelfde manier treedt ook interferentie op tussen het ultra-geluid uit ons voorbeeld, met de oorspronkelijke frequentie van 5 000 000 Hz en het Doppler-verschoven geluid met een frequentie van 5 003 375 Hz. De zwevingfrequentie is dan 3375 Hz. Dit ligt in het voor ons hoorbare gebied (20 - 20 000 Hz), bij veel apparatuur kan dit direct hoorbaar gemaakt worden.

In de verloskundigenpraktijk wordt dit principe ook gebruikt: "Even naar het hartje luisteren". De transducer van het apparaat, dat wel bekend staat als 'echo-dopp', wordt op de onderbuik van de aanstaande moeder gezet. Daarbij wordt de transducer zó gedraaid dat het hart van het foetus in de geluidsbundel ligt. De beweging van het hartje veroorzaakt een intense Doppler-verschuiving. Het teruggekomen (en Doppler-verschoven) signaal wordt gemengd met het oorspronkelijke signaal. Er ontstaan zwevingen die met een luidspreekertje hoorbaar worden gemaakt.

## 5 Meten onder een hoek

De praktijk is natuurlijk nooit zo mooi dat we de transducer (en dus de geluids-bundel) evenwijdig aan de stroomrichting kunnen zetten ( $\theta = 0^\circ$  of  $180^\circ$ ). We meten dus nooit recht in de richting van een bloedvat. Daar komt nog bij dat de hoek  $\theta$  geen vaste waarde heeft, immers in Figuur 3 kunnen we zien dat de ultra-geluidsbundel een beetje 'uitwaaiert', dit noemen we divergentie. De bloedcellen worden daardoor onder verschillende hoeken getroffen door de geluidsbundel, met andere woorden, er treedt een spreiding op in de waarde van  $\theta$ . De exacte spreiding in  $\theta$  weten we niet. Wanneer we de gemiddelde waarde van  $\theta$  in de formule gebruiken maken we dus fout in de berekening van de snelheid. In het volgende voorbeeld gaan we kijken tot welke fouten dit leidt in de snelheid die berekend wordt.

Voorbeeld 2: Stel we hebben een ultra-geluidsbundel met een divergentiehoek van  $2\alpha = 12^\circ$ . De bloedcellen worden daardoor getroffen onder een hoek  $\theta \pm 6^\circ$ . We nemen dezelfde waarden als in het vorige voorbeeld ( $f_0 = 5$  MHz en  $c = 1570$  m/s) en een bloedsnelheid van  $v = 1,00$  m/s. We gaan nu bekijken welke invloed de *gemiddelde* hoek  $\theta$  heeft op de *berekende* snelheid, door de verschillende waarden van  $\theta' = \theta \pm 6^\circ$  in te vullen in de formule die volgt uit (1):

$$v = \frac{c \Delta f}{f_0 \cos \theta'} = \frac{1570 \times \Delta f(\theta)}{5 \cdot 10^6 \times \cos \theta'} \quad \text{m/s} \quad (2)$$

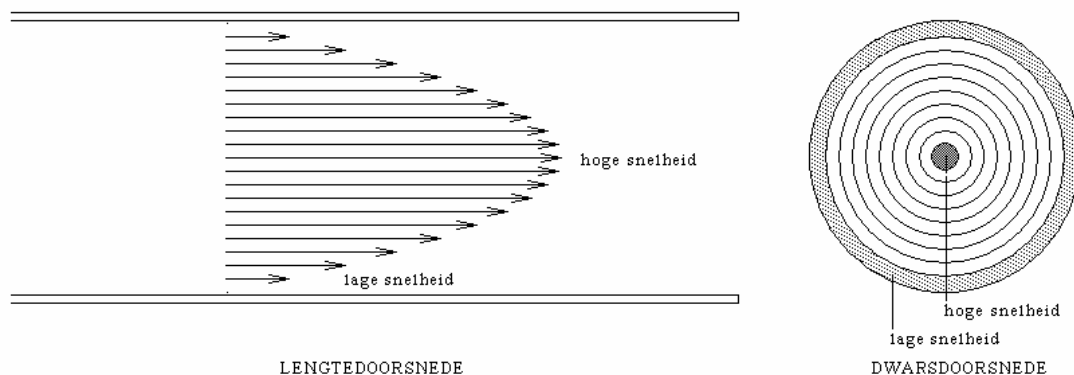
Waarbij  $\theta'$  de werkelijke hoek is tussen de geluidsbundel en de stromingsrichting, en  $\Delta f$  afhankelijk is van de gemiddelde hoek  $\theta$ . De berekende waarden van de snelheid staan in Tabel 1. Bij  $\theta = 50^\circ$ , worden de bloedcellen getroffen met hoeken tussen de  $44^\circ$  en de  $56^\circ$ . De berekende snelheden variëren van 0,894 m/s tot 1,149 m/s, de fout ten opzichte van de werkelijke waarde van 1 m/s is 11% tot 15%. Uit de tabel blijkt dat de fout oploopt bij grotere waarden van  $\theta$  in de praktijk houdt men daarom een *maximale* meethoek van  $60^\circ$  aan. Als het mogelijk is een kleinere meethoek te bereiken is dit natuurlijk altijd beter. In de praktijk kan dit in sommige gevallen door de transducer schuin in de huid te drukken.

Tabel 1. Doorwerking van de fout in de hoek  $\theta$  in de berekende snelheid.

$\theta$ (°)	$\theta'$ (°)	berekende snelheid (m/s)	FOUT (%)	$\theta'$ (°)	berekende snelheid (m/s)	FOUT (%)
0	-6	1,006	+1	6	1,006	+1
10	4	0,987	-1	16	1,024	+2
20	14	0,968	-3	26	1,046	+5
30	24	0,948	-5	36	1,070	+7
40	34	0,924	-8	46	1,103	+10
50	44	0,894	-11	56	1,149	+15
60	54	0,851	-15	66	1,229	+23
70	64	0,780	-22	76	1,414	+41
80	74	0,630	-37	86	2,489	+149

### 3 Stromingsprofielen

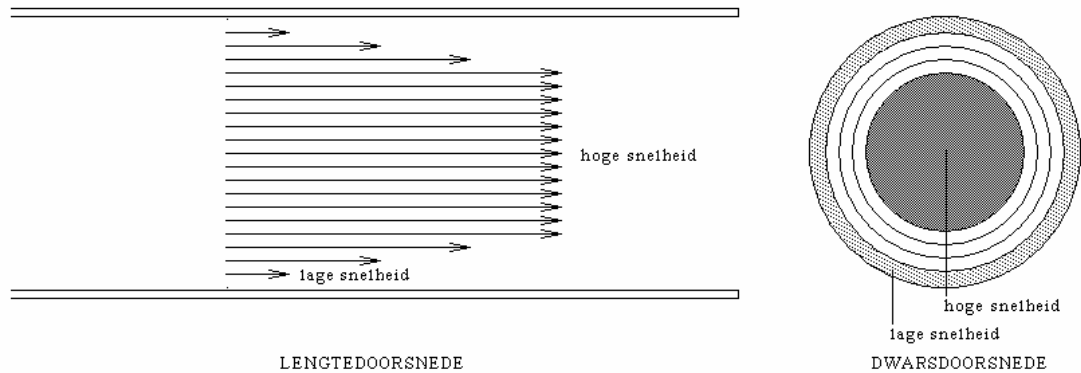
Tot nu toe hebben we alleen gekeken naar de snelheid van één enkele bloedcel. Een bloedvat vol bloed bevat echter heel veel cellen die ieder een verschillende snelheid hebben. Deze snelheden hangen af van de hoeveelheid bloed (ml/s) die door het bloedvat stroomt, en van de diameter en de vorm van het vat, en de soort stroming die er in het vat heerst. Er zijn drie soorten van stroming te onderscheiden: 1. laminaire stroming, 2. plugvormige stroming en 3. turbulente stroming. We zullen deze vormen van stroming stuk voor stuk behandelen.



**Figuur 5.** Snelheidsprofiel van laminaire stroming binnen een bloedvat.

### 3.1 Laminaire stroming

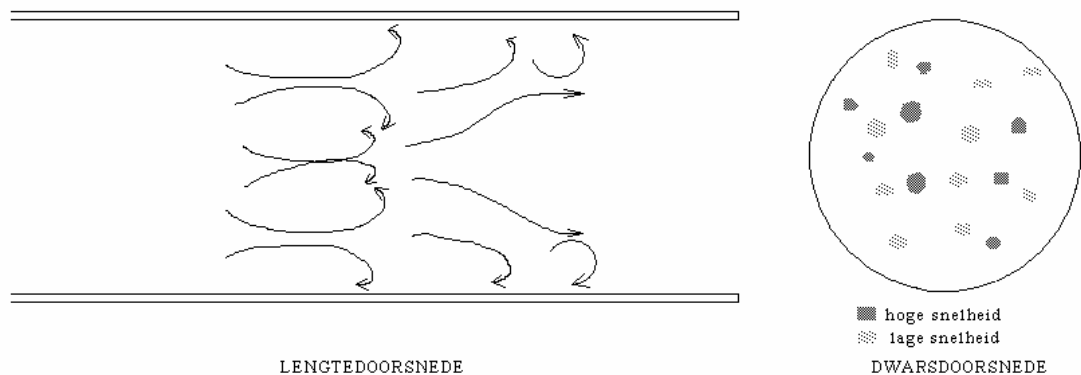
Wanneer de snelheid van het bloed in een bloedvat laag is, zal het bloed aan de wand van het bloedvat vrijwel stilstaan, meer naar het midden van het bloedvat wordt de snelheid steeds hoger, volgens een parabolische kromme. We noemen dit *laminaire stroming*. In Figuur 5 is de doorsnede door een bloedvat getekend, de lengte van de pijlen geven de snelheid van het bloed aan, de parabolische vorm is duidelijk te zien.



**Figuur 6.** Snelheidsprofiel van plugvormige stroming binnen een bloedvat.

### 3.2 Plugvormige stroming

Een ander stromingsprofiel dat kan ontstaan is de plugvormige stroming (naar het Engelse woord *plug* dat 'stop', in de vorm van een dop van een stopflesje, betekent). Het stromingsprofiel heeft min of meer de vorm van een stop van een stopflesje. In de doorsnede (Figuur 6) zien we dat het meeste bloed met een hoge snelheid stroomt, bij de wanden is de snelheid lager.



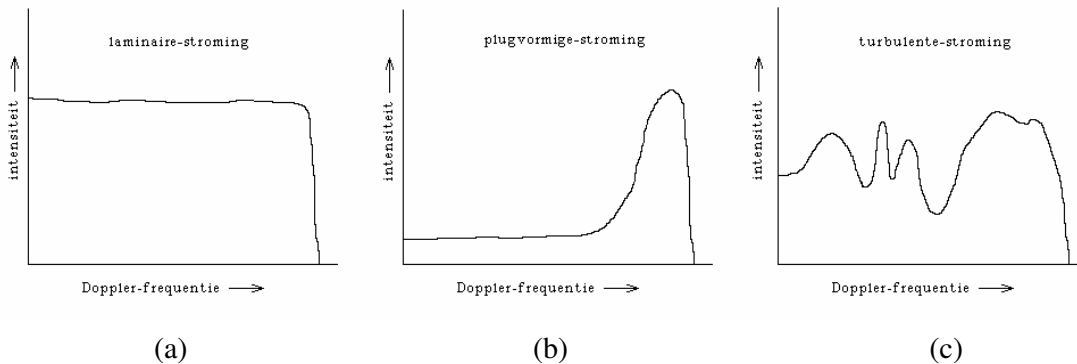
**Figuur 7.** Snelheidsprofiel van turbulente stroming binnen een bloedvat, hoge en lage snelheden zijn willekeurig over de doorsnede verdeeld.

### 3.3 Turbulente stroming

Onder bepaalde omstandigheden kan er turbulente stroming ontstaan. Er ontstaan dan draaiingen (turbulenties) in het stromingsprofiel, en plaatselijk stromen er zelfs bloedcellen tegen de hoofdstroomrichting in. Wandonregelmatigheden en plaques kunnen de oorzaak zijn van de verstoring van het laminaire stromingsprofiel, waardoor trubulentie ontstaat. Figuur 7 laat een doorsnede van dit stromings profiel zien.

## 4 Meer bloedcellen tegelijk

Wanneer we één bloedcel hebben met één snelheid zal de Doppler verschuiving die deze bewegende cel veroorzaakt ook één waarde hebben. We hebben in de praktijk echter heel veel bloedcellen, met elk hun eigen snelheid. Deze zullen ook elk hun eigen Doppler-verschuiving veroorzaken. De intensiteitsverdeling van alle Doppler-verschuivingen die voorkomen noemen we het Doppler-spectrum. Heel ruwweg zou je kunnen zeggen dat als de snelheid laag is de intensiteit in dit spectrum groot is bij lage Doppler-frequenties. Wanneer er alleen hoge snelheden voorkomen zouden we vooral hoge Doppler-frequenties in het spectrum zien. In de praktijk blijkt er een verband tussen het Doppler-spectrum en de vorm van de stroming.



**Figuur 8.** Doppler-frequentie spectra afkomstig van de drie stromingsprofielen.

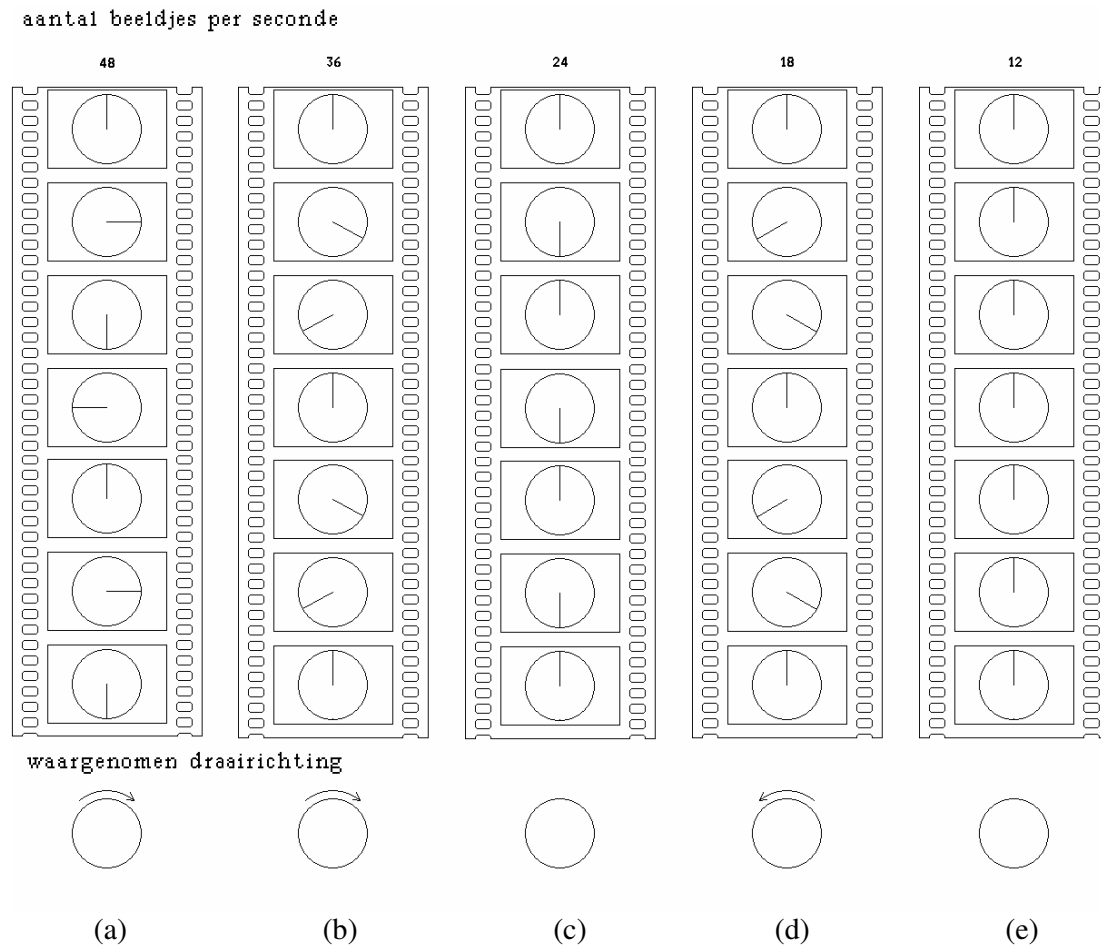
De laminaire stroming geeft een spectrum dat ongeveer rechthoekig is. Binnen een bepaald gebied komen alle Doppler-frequenties ongeveer even veel voor (Figuur 8a). In plugvormige stroming zien we dat hogesnelheden relatief veel voorkomen. Dit zorgt er voor dat de hoge Doppler-frequenties relatief veel voorkomen, dit zien we ook in het spectrum (Figuur 8b). Bij turbulente stroming is er geen duidelijk verband tussen de intensiteit en de frequentie in het Doppler-spectrum. Bovendien wisselt het spectrum voortdurend, in korte tijd kunnen we een spectrum zien als in het derde geval in Figuur 8c.

## 5 Aliasing en het Nyquist-theorema

Wanneer je 's ochtends om 7<sup>u</sup>13 naar het treinstation in Groningen gaat zie je naast perron 3B een gele trein staan. Wanneer je om 8<sup>u</sup>13 weer kijkt zie je daar weer de gele trein staan. Kijk



je ook om  $9^u13$ ,  $10^u13$  ...  $22^u13$ , dan zie je steeds de gele trein staan. Om  $22^u13$  kun je dan de conclusie trekken dat langs perron 3B gedurende de gehele dag dezelfde gele trein heeft gestaan. Maar je hebt wat gemist, vlak na de tijdstippen waarop je gekeken hebt is de trein vertrokken, en even later is er een andere trein uit Zwolle aangekomen, op hetzelfde perron, en deze zal binnenkort ook weer vertrekken. Door niet zo vaak te kijken heb je informatie gemist. Hoe vaak je kijkt noemen we de *sample-rate* (de bemonsteringssnelheid), de sample-rate was in dit voorbeeld  $1\times$  per uur. Wanneer je de sample-rate groter had gemaakt, bij voorbeeld  $10\times$  per uur, had je geconstateerd dat er momenten waren dat er geen trein langs het perron stond. Je zou aan het eind van de dag niet de conclusie trekken dat er gedurende de gehele dag een trein langs perron 3B zou hebben gestaan.



**Figuur 9.** Filmstrookjes uit een filmcamera die 48, 36, 24, 18 en 12 beeldjes per seconde heeft opgenomen van een wiel dat 12 omwentelingen per seconde maakt.

Een zelfde soort verschijnsel doet zich voor in het volgende voorbeeld. Stel je hebt een wiel met een spaak, het wiel draait rechtsonder met een omwentelingssnelheid van 12 keer per seconde. Je gaat met een filmcamera het wiel filmen. Zo'n camera maakt een vast aantal foto's per seconde. Je kiest een snelheid van 48 beeldjes per seconde, per omwenteling van

het wiel maak je dus 4 opnames. Als je de film ontwikkeld hebt en je bekijkt de filmstrook zie je het beeld als in Figuur 9a, de meest linker strook. Uit de plaats van de spaak op het wiel maak je op dat het wiel rechtsom gedraaid heeft. Doe je het experiment met een lagere beeldsnelheid, bijvoorbeeld 36 opnames per seconde, dan maak je per omwenteling dus nog 3 opnames, je krijgt een filmstrook als in Figuur 9b. Je ziet nog steeds dat het wiel rechtsom gedraaid wordt. Als je nog zuiniger wilt zijn, want film is duur, kun je ook 24 beeldjes per seconde kiezen, je maakt 2 opnames per omwenteling en het filmpje ziet er uit als in Figuur 9c. De spaak is precies boven of precies beneden, en je weet niet of het wiel nu linksom of rechtsom draait. Kies je een nog lager aantal beeldjes per seconde, bijvoorbeeld 18 (Figuur 9d), dan legt de spaak  $\frac{2}{3}$  omwenteling tussen twee beeldjes af, en lijkt het alsof het wiel linksom draait. Dit effect heet *aliasing*, je neemt iets anders waar dan er in werkelijkheid gebeurt. Kies je tenslotte 12 beeldjes per seconde (Figuur 9e), dan lijkt het wiel stil te staan. Wanneer je dus wilt weten *of het wiel draait en in welke richting* het draait dan moet je per omwenteling meer dan twee beeldjes maken. In het algemeen zeggen we dat de bemonsteringsfrequentie (het aantal beeldjes per seconde) minstens  $2\times$  zo groot moet zijn als de hoogst waarneembare frequentie (de omwentelingssnelheid). We noemen dit het Nyquist theorema.

## 6 Diepte en snelheid

Echo-Doppler apparatuur maakt gebruik van geluidspulsen. Een puls wordt het lichaam ingezonden, de puls reflecteert aan een overgang van bijvoorbeeld het ene weefsel naar het andere weefsel, en na een tijdje keert de puls terug in de transducer. Uit de tijd die verstreken tussen uitzending en ontvangst, en de geluidssnelheid in het weefsel, wordt de diepte waarop de reflectie heeft plaatsgevonden uitgerekend, en dit wordt weergegeven in het beeld dat met het echo-apparaat wordt gemaakt.

Voorbeeld 3: Stel we zenden een ultra-geluidspuls in het weefsel uit. Deze beweegt met een snelheid van 1540 m/s door het weefsel, en  $8\ \mu\text{s}$  keert een reflectie van deze puls terug in de transducer. De weglengte  $s$  die de puls heeft afgelegd is:

$$s = v \times t = 1540\ \text{m/s} \times 80 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 0.123\ \text{m}$$

Deze weglengte is gelijk aan de heenweg plus de terugweg, dat is  $2\times$  de diepte waarop de reflectie heeft plaatsgevonden, deze diepte is dus 6.15 cm.

Willen we een goed beeld krijgen op deze diepte, dan betekent dit dat we gedurende deze  $80\ \mu\text{s}$  geen nieuwe puls kunnen uitzenden. We kunnen maximaal 12 500 pulsen per seconde uitzenden, de bemonsteringsfrequentie (of *sample-rate*) is dan 12.5 kHz. Wanneer de pulsen die terugkeren óók Doppler-verschoven frequenties bevatten, betekent dit dat we deze Doppler-frequenties alleen juist kunnen meten wanneer deze de helft zijn van onze bemonsterings frequentie, ofwel maximaal 6.25 kHz. Immers volgens het Nyquist theorema moet de bemonsterings frequentie (12.5 kHz)  $2\times$  zo groot zijn als het hoogste Doppler-frequentie (6.25 kHz). Dit legt dan ook een grens aan de hoogste snelheid die we op die diepte kunnen meten.

Voorbeeld 4: Stel we hebben een ultra-geluidsbundel met frequentie  $f_0 = 3.5\ \text{MHz}$ , en we meten de bloedsnelheid in een bloedvat op een diepte van 10 cm. Hoe groot is de maximum snelheid die we kunnen meten? We gaan uit van de situatie dat de hoek  $\theta = 0^\circ$ .

De tijd die tussen de pulsen kan zitten is:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2 \times 0.10 \text{ m}}{1540 \text{ m/s}} = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Dat betekent dat we per seconde kunnen bemonsteren met een frequentie:

$$R = \frac{1}{t} = \frac{1}{1.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}} = 7700 \text{ s}^{-1} = 7700 \text{ Hz}$$

De maximale Doppler-verschuiving mag daar de helft van zijn, dus 3850 Hz.

Uit de eerder gegeven formule voor de Doppler-verschuivingsfrequentie

$$\Delta f = \frac{2 f_0 v \cos \theta}{c}$$

met  $\theta = 0^\circ$  en dus  $\cos \theta = 1$  kunnen we afleiden:

$$v = \frac{c \cdot \Delta f}{2 f_0} = \frac{1540 \text{ m/s} \cdot 3850 \text{ Hz}}{2 \times 3.5 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 0.85 \text{ m/s}$$

**De auteur, de uitgever en/of hun medewerkers aanvaarden geen enkele aansprakelijkheid voor schade, letsel, verwonding of verlies veroorzaakt door het gebruik van deze informatie.**